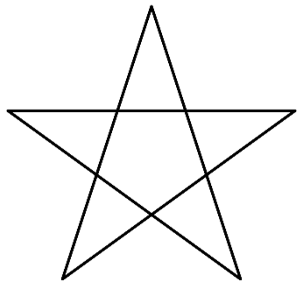
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
8 класс
Решения

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.

8.1. Разместите на плоскости 10 котят и 5 равных отрезков так, чтобы на каждом отрезке сидело по 4 котёнка (считайте котят точками на плоскости).



Решение. Посадим котят в вершины и узлы пентаграммы (фигура, образованная диагоналями правильного пятиугольника). Условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.2. Известно, что 70% математиков, ушедших в IT, жалеют о своей смене деятельности. При этом из всех людей, ушедших в IT, о смене деятельности жалеет только 7%. Сколько процентов из ушедших в IT являются математиками, если только они жалеют о смене деятельности?

Решение. Пусть всего в IT ушло x человек, а математиков из них y. По условию о смене деятельности, с одной стороны, жалеет $0.07x$ человек, а с другой – $0.7y$. Отсюда получаем, что $0.07x = 0.7y$, откуда $y/x = 0.1$, то есть, 10%.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Решение в частном случае (пусть есть 100 человек всего…) без ссылки на общий – не более 5 баллов.

8.3. Даны два числа a и b. Известно, что из четырёх чисел ab, $a + b$, $a - b$, a/b ровно три равны между собой (b не равно 0). Найдите a и b.

Решение. Очевидно, что $a + b \neq a - b$, поэтому именно одно из этих двух чисел отличается ото всех остальных. Тогда $ab = a/b$. Если $a = 0$, то числа из условия равны 0, b, $-b$, 0 соответственно, и условие выполнено быть не может. Тогда $a \neq 0$, и на него можно сократить, откуда $b = 1/b$, что равносильно $b = \pm1$.
Если $b = 1$, то числа имеют вид a, $a + 1$, $a - 1$, a. Но первое число не может быть равно ни второму, ни третьему, значит, это вариант невозможен.
Если $b = -1$, то числа имеют вид $-a$, $a - 1$, $a + 1$, $-a$.

Если $-a = a - 1$, то $a = ½$.

Если $-a = a + 1$, то $a = -½$.

Отсюда получаем ответ: $a = \pm ½$, $b = -1$.

Критерии. Только полный верный ответ/ответ с проверкой (и больше ничего) – 1 балл.
Замечено, что $a + b \neq a - b$ – 2 балла.

Доказано, что $b = \pm 1$ (или, что то же самое, $b = 1/b$ или $b^2 = 1$) – 2 балла. При этом, если не рассмотрен случай $a = 0$, то один балл снимается.
Рассмотрен случай $b = 1$ – 1 балл.
Рассмотрен случай $b = -1$ – 2 балла. Все баллы суммируются $(2 + 2 + 1 + 2 = 7)$

8.4. Как-то раз в средневековой Англии за круглым столом собрались 2021 человек. Каждый из них был либо рыцарем, который всегда говорил правду, либо лжецом, который всегда лгал, причём среди присутствовавших имелся хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Кроме того, известно, что в этот день был сильный туман, и каждый человек видел только 12 ближайших соседей слева от себя и 12 ближайших соседей справа. Каждого сидящего за столом спросили: “Видишь ли ты среди других людей лжецов больше, чем рыцарей?”. Докажите, что кто-то ответил “да”.

Решение. Предположим, все люди ответили “нет”. Найдём тогда соседних рыцаря и лжеца (например, можно взять рыцаря, который по условию есть, и сдвигаться по часовой стрелке, пока не найдётся лжец). Рассмотрим 26 человек $A_1,\dots A_{26}$, у которых центральных – эти самые рыцарь A_{13} и лжец A_{14} (если они идут в другом порядке, перевернём нумерацию).
Так как рыцарь говорит “нет”, то среди людей $A_1 \dots A_{12}$ и $A_{14} \dots A_{25}$ лжецов не больше, чем рыцарей. То есть, их там не более 12. Но A_{14} лжец, откуда следует, что среди $A_1 \dots A_{12}$ и $A_{15} \dots A_{25}$ лжецов не более 11.
Так как лжец говорит “нет”, то среди людей $A_2 \dots A_{13}$ и $A_{15} \dots A_{26}$ лжецов больше, чем рыцарей. То есть, их там более 12. Но A_{13} рыцарь, поэтому среди $A_2 \dots A_{12}$ и $A_{15} \dots A_{26}$ лжецов более 12.
Последние два абзаца противоречат друг другу, так как новый лжец мог появиться только один – это человек A_{26}. А их количество должно увеличиться хотя бы на 2 – с числа не более 11 до числа больше 12. Противоречие с предположением, что все ответят “нет”.

Критерии. Идея рассмотреть рыцаря и лжеца, которые являются соседями – 2 балла.
Потерян нестрогий знак неравенства в верном решении (“лжец говорит, что лжецов больше, значит, рыцарей больше”) – снимать 2 балла.

8.5. На столе по кругу лежит $n > 3$ одинаковых монет, которые могут располагаться либо вверх орлом, либо вверх решкой. Если рядом с некоторой монетой лежат два орла или две решки, то эту монету можно перевернуть. Такую операцию разрешается проделать неограниченное число раз. При каких n можно вне зависимости от начального положения монет перевернуть их все одной стороной вверх?

Решение. Пусть n нечётно. Разделим весь круг на группы из одинаковых подряд идущих монет. Найдётся группа из нечётного числа монет (иначе общее количество монет в круге будет чётным как сумма чётных чисел). Рассмотрим эту группу. Перевернём в ней вторую, четвёртую и т.д. – все чётные монеты. После этого мы сможем перевернуть в ней первую, третью и т.д. – все нечётные монеты. В итоге количество групп в круге уменьшится, и мы сможем повторить все те же самые рассуждения. В конце концов группа останется только одна, но это и будет значить, что все монеты перевёрнуты одинаково.

Теперь пусть n чётно. Если n делится на 4, то в расстановке …ООРРООРР… нельзя сделать вообще ни одной операции. Если не делится, то рассмотрим расстановку …ООРРРРООРРООРР… – одна группа из четырёх решек, а остальные группы по 2 орла или 2 решки. Если мы перевернём вторую решку из этих четырёх, то после этого мы можем перевернуть только первую, и получить аналогичную расстановку, в которой 4 орла. Если перевернём третью, то затем только четвёртую, и снова 4 орла. Для этой расстановки аналогичными рассуждениями можно показать, что мы можем получить только расстановку, которая была изначально (или сдвинуть эту группу из 4 решек). Значит, перевернуть все монеты одной стороной не выйдет.

Критерии. Верно рассмотрен нечётный случай – 3 балла.
Верно рассмотрен случай, когда n делится на 4 – 1 балл.
Верно рассмотрен случай, когда n чётное, но не делится на 4 – 3 балла. При этом, если приведена только расстановка, но не доказано, почему она подходит – 2 балла из 3 за этот случай.
Все эти баллы суммируются.